

GUIA DOCENT
ÀLGEBRA LINEAL



UAB

Universitat Autònoma
de Barcelona

Guia docent

Titulacions de Grau i de Màster



1. Dades de l'assignatura

Nom de l'assignatura	Àlgebra Lineal
Codi	100088
Crèdits ECTS	12
Curs i període en el que s'imparteix	1r curs. Anual
Horari	Consultar Web de la Facultat: http://www.uab.cat/ciencies
Lloc on s'imparteix	FACULTAT DE CIÈNCIES
Llengües	Català i algunes sessions en Castellà (depenent del Professor)

Professor/a de contacte

Nom professor/a	Dolors Herbera
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	Universitat Autònoma de Barcelona
Despatx	C1/364
Telèfon	93 581 3250
e-mail	Dolors@mat.uab.cat
Horari d'atenció	Pel primer semestre: Dimarts de 11 a 13, i pel segon semestre: Dilluns de 11 a 13

2. Equip docent

Nom professor/a	Ramon Antoine
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/324
Telèfon	93 581 13 95
e-mail	ramon@mat.uab.cat
Horari de tutories	Dilluns, de 15 a 17 i divendres de 11 a 13



Nom professor/a	Pere Ara
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/214
Telèfon	93 581 45 43
e-mail	para@mat.uab.cat
Horari de tutories	Dilluns, de 11 a 13 i a convenir
Nom professor/a	Ferran Cedo
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/352
Telèfon	93 581 41 56
e-mail	cedo@mat.uab.cat
Horari de tutories	1r Semestre: Dimarts, de 10-12 i de 17-18. Dijous, de 11-13 i de 15-16 2n Semestre: Dimarts, de 17-19 i Dijous, de 11-13
Nom professor/a	Francesc Perera
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/210
Telèfon	93 581 45 43
e-mail	perera@mat.uab.cat
Horari de tutories	Dimarts, de 9 a 11 i resta a convenir



Nom professor/a	Wolfgang Pitsch
Departament	Matemàtiques
Universitat/Institució	UAB
Despatx	C1/220
Telèfon	93 581 45 44
e-mail	pitsch@mat.uab.es
Horari de tutories	Dilluns, de 14 a 15 i a convenir

3.- Prerequisits

Encara que el curs serà força autocontingut es requerirà que l'alumne conegui la resolució de sistemes d'equacions lineals i l'aritmètica bàsica de números i de polinomis, i que tingui destresa de càlcul amb expressions algebraïques simbòliques.

El requisit més important, però, és una gran curiositat per entendre profundament els temes que s'estudiaran.

4.- Contextualització i objectius formatius de l'assignatura

Els objectius d'aquesta assignatura són de dos tipus: assolir formació Matemàtica bàsica i assolir coneixements i destreses propis de l'Àlgebra Lineal.

Entre els objectius de caire formatiu destaquem els següents: entendre i utilitzar correctament el llenguatge matemàtic, veure la necessitat de les demostracions i desenvolupar el sentit crític davant les afirmacions matemàtiques i, finalment, desenvolupar actituds combatives davant els problemes.

Per adquirir una bona formació matemàtica és essencial entendre a fons la Teoria de l'Àlgebra Lineal. Cal aprendre a manipular els conceptes que s'introdueixen al curs perquè s'usen no només en totes les branques de la Matemàtica sinó també en la Informàtica i en la Física.



5.- Competències i resultats d'aprenentatge de l'assignatura

Competència	CE1. Comprendre i utilitzar el llenguatge matemàtic
Resultats d'aprenentatge A nivell de comunicació escrita: -Llegir i comprendre un text de matemàtiques del nivell del curs. -Redactar de manera ordenada i amb precisió petits textos matemàtics (exercicis, resolució de qüestions de teoria,...) A nivell de comunicació oral: -Seguir i comprendre una explicació oral d'un tema de matemàtiques relacionat amb el curs. -Saber explicar idees i conceptes matemàtics propis del curs, així com saber comunicar a tercers raonaments propis	
Competència	CE4. Calcular, reproduir determinades rutines i processos matemàtics amb agilitat
Resultats d'aprenentatge Resoldre i discutir sistemes d'equacions lineals. Calcular determinants i descomposicions de matrius. Calcular inverses de matrius invertible. Treballar amb diferents bases d'espais vectorials de dimensió finita. En el cas particular de K^n saber manipular els subespais tant si venen presentats per generadors com si venen presentats com solucions d'un sistema d'equacions lineals homogenis. Classificar matrius i aplicacions lineals segons diversos criteris (rang, formes diagonal i de Jordan). Calcular bases ortogonals i projeccions ortogonals.	
Competència	CE5. Assimilar la definició d'objectes matemàtics nous, de relacionar-los amb altres coneguts i de deduir les seves propietats
Resultats d'aprenentatge 1. Demostrar saber i aplicar els conceptes de sistema d'equacions lineals, solucions d'un sistema, matriu, matriu invertible, rang d'una matriu i determinant. 2. Demostrar saber i aplicar la relació entre canvi elemental i matriu elemental. 3. Demostrar saber els conceptes de cos i el d'espai vectorial des d'un punt de vista geomètric i des d'un punt de vista algebraic. Demostrar saber que és una estructura algebraica abstracta. 4. Demostrar saber el concepte de base i dimensió, el teorema de la base i els seus corol·laris. Aplicar-los en els exemples principals i saber deduir-ne propietats bàsiques. 5. Demostrar saber el concepte de morfisme i isomorfisme entre estructures algebraiques. 6. Demostrar saber i usar els conceptes d'aplicació lineal i de nucli i imatge d'una aplicació lineal. Demostrar saber el concepte d'isomorfisme i el teorema de l'isomorfisme entre espais vectorials. Saber aplicar-los. 7. Demostrar saber el concepte de coordenades d'un vector en una base i el de matriu d'una aplicació lineal en unes bases de sortida i d'arribada. Identificar tipus especials d'aplicacions com les projeccions. 8. Demostrar saber el concepte d'endomorfisme diagonalitzable i el teorema de diagonalització. Usar-lo en diferents contextes. 9. Demostrar saber el concepte de polinomi anul·lador d'una matriu o d'un endomorfisme. Saber deduir-ne les seves propietats bàsiques. 10. Demostrar saber els conceptes de forma canònica de Jordan i de base de Jordan d'un endomorfisme. Relacionar la descomposició d'un espai vectorial com a suma directa de subespais invariants per un endomorfisme amb escriure la matriu associada a l'endomorfisme com una matriu de blocs. 11. Demostrar saber el concepte de forma bilineal i la seva matriu associada respecte d'una base. 12. Demostrar saber el concepte de base ortogonal d'un espai vectorial amb una forma bilineal simètrica.	



Competència	CE6. Formular hipòtesis i imaginar estratègies per confirmar-les o refutar-les
Resultats d'aprenentatge	<p>Desenvolupar estratègies autònomes per la resolució de problemes:</p> <ul style="list-style-type: none"> -Identificar el camp de problemes propis del curs. -Discriminar els problemes rutinaris dels no rutinaris. -Dissenyar una estratègia a priori per resoldre un problema. Avaluat la estratègia i modificar-la si cal. -Traduir en el contexte d'un problema concret resultats teòrics que poden ser útils per resoldre'l. <p>Contrastar, si és possible, l'ús del càlcul amb l'ús de l'abstracció per tal de resoldre un problema. Avaluat els avantatges i desavantatges dels dos mètodes.</p>
Competència	CE9. Utilitzar aplicacions informàtiques d'anàlisi estadística, càlcul numèric i simbòlic, visualització gràfica, optimització o altres per experimentar en Matemàtiques i resoldre problemes.
Resultats d'aprenentatge	<p>Demostrar saber usar un manipulador algebraic per resoldre els processos més rutinaris que s'expliquen al curs:</p> <p>Resoldre i discutir sistemes d'equacions lineals. Calcular determinants i descomposicions de matrius. Classificar matrius i aplicacions lineals segons diversos criteris (rang, formes diagonal i de Jordan).</p>
Competència	CE11. Demostrar de forma activa una elevada preocupació per la qualitat en el moment d'argumentar o exposar les conclusions dels seus treballs.
Resultats d'aprenentatge	Desenvolupar el pensament crític davant d'arguments propis i aliens, i la claretat a l'hora d'argumentar.



6. Continguts de l'assignatura

I. Matriu i determinants (3ECTS)

- Operacions amb matrius.
- Canvis elementals i matrius elementals.
- Els teoremes: PAQ-reducció, rang d'una matriu i matrius invertibles.
- Sistemes d'equacions lineals: Teorema de Rouché Frobenius.
- El cas de les matrius simètriques. Polinomis de grau 2 en varies variables: Primera aproximació al Teorema de Sylvester.
- Determinants i canvis elementals. Càlcul de determinants.
- Càlcul d'inverses i sistemes d'equacions lineals des del punt de vista dels determinants.

II. Espais vectorials (3ECTS)

- Conceptes bàsics: cos i espai vectorial sobre un cos. Exemples.
- Espai vectorial finitament generat: Dependència e independència lineal.
- Bases, dimensió i coordenades. Teorema de Steinitz.
- Suma e intersecció de subespais. Fórmula de Grassmann. Suma directa de subespais.
- Espai quocient.

III. Aplicacions lineals (5ECTS).

III.1. Morfismes d'espais vectorials.

- Les aplicacions que conserven la estructura d'espai vectorial: aplicacions lineals. Exemples.
- Components d'un vector respecte a una base. L'isomorfisme "prendre components" respecte d'una base.
- L'espai vectorial $\text{Hom}_k(E, E)$. L'espai dual.
- Nucli i imatge d'una aplicació lineal. Injectivitat i exhaustivitat. Revisem el Teorema de Rouché Frobenius.
- Teoremes d'isomorfia.
- Matriu associada a una aplicació lineal. Composició d'aplicacions lineals i producte de matrius.
- Canvi de coordenades i canvi de base.

III.2. Formes canòniques d'endomorfismes: Diagonalització i Forma de Jordan.

- Vectors propis, valors propis. Polinomi característic d'un endomorfisme i d'una matriu.
- Caracterització de les matrius i/o dels endomorfismos diagonalitzables.
- Revisitem la descomposició d'un espai vectorial en suma directa de subespais.
- Polinomi mínim d'un endomorfisme i d'una matriu. Comparem el polinomi mínim i el característic: El Teorema de Cayley Hamilton.
- Subespais invariants per un endomorfisme. El primer teorema de descomposició. Un nou criteri de diagonalització.
- Endomorfismes nilpotents. Caixes de Jordan i matrius de Jordan. Segon Teorema de descomposició: La forma de Jordan per endomorfismes nilpotents.
- Caracterització de les matrius i dels endomorfismes que tenen forma de Jordan.

IV. Formes bilineals simètriques (1ECTS).

- Definicions i exemples de formes bilineals simètriques.
- Matriu associada a una forma bilineal. Canvi de base.
- Bases ortogonals per formes bilineals simètriques.
- Descomposicions ortogonals. Projeccions.
- Versió abstracta del Teorema de Sylvester.
- Productes escalars.
- El Teorema Espectral.

En el curs es desenvolupen les tècniques per resoldre tres problemes que tenen en comú poder-se escriure en llenguatge matricial:

- Resoldre sistemes d'equacions lineals, tema que l'alumne ja conèix una mica de la secundària.
- Determinar fórmules tancades pels components de les potències d'una matriu quadrada.
- Determinar formes canòniques per certs tipus de polinomis de grau 2 en varies variables els *polinomis de grau 2 homogenis*.



Els sistemes d'equacions lineals es tracten en detall en la primera part del curs. Aquests i altres tècniques de càlcul matricial, que es desenvolupen en aquesta part, seran una eina fonamental al llarg del curs per atacar gairebé tots els problemes de càlcul que es plantejaran. Destaquem l'aplicació dels canvis elementals a les matrius simètriques que ens permetrà donar una primera aproximació al problema de classificació dels polinomis de grau 2 homogenis. En la segona part del curs s'introdueixen els espais vectorials: la estructura algebraica abstracta associada als tres problemes mencionats anteriorment. Veurem com el desenvolupament de la teoria dels espais vectorials ens permetrà *substituir llargs càlculs amb matrius per raonaments abstractes*.

Les aplicacions lineals, que s'estudien a la tercera part del curs, són les aplicacions entre els espais vectorials que conserve aquesta estructura. Al prendre coordenades/components, veurem que aquestes aplicacions són *essencialment les que venen donades per fer producte per una matriu*. Això ens permet re-entendre els sistemes d'equacions lineals i abordar el càlcul de potències d'una matriu en termes d'aplicacions lineals. Els temes de diagonalització i forma canònica de Jordan continguts en aquesta part són, sens dubte, els més importants del curs, i en ells s'utilitzen totes les eines desenvolupades fins aleshores.

Tots els objectes que s'introdueixen al llarg del curs tenen un profund significat geomètric. Això es fa encara més patent en la última part on es parla un altre tipus d'aplicacions entre espais vectorials: les formes bilineals. Aquestes són la *versió abstracta* dels polinomis de grau dos que s'estudien a la primera part del curs i, a més, permeten veure una matriu (simètrica) com una manera de donar una geometria mètrica a un espai (vectorial).



7.- Metodologia docent i activitats formatives

Aquesta assignatura té dues hores setmanals de teoria, una hora setmanal de problemes i 2 hores de seminari cada dues setmanes, però, com en totes les assignatures de Matemàtiques, per arribar-ne a assolir un bon coneixement el més important és el treball i l'esforç personal de l'alumne, i amb aquesta idea s'ha dissenyat la metodologia de les assignatures de primer curs.

En les **classes de teoria** el professor exposarà i desenvoluparà el contingut del curs. Les classes de teoria són les que marquen el ritme del curs, la resta d'activitats estan coordinades al seu voltant.

El coneixement de les nocions introduïdes a teoria, els enunciats dels teoremes i les seves aplicacions són imprescindibles a l'hora de posar-se a atacar els problemes. Però també és bàsica la comprensió de les demostracions dels teoremes i proposicions per tal d'aprofundir en les nocions i de resoldre els problemes amb tècniques semblants.

Durant l'explicació del professor o en hores de tutoria els alumnes haurien de preguntar tots els dubtes que tinguin.

Es parlarà especial atenció al ús del llenguatge i de la nomenclatura per tal d'orientar a l'alumne a l'ús del llenguatge matemàtiques i fer-li notar els requeriments de precisió del llenguatge formal.

Es recomana a l'alumne fer ús de la bibliografia recomanada per tal de completar les explicacions de classe i veure aproximacions alternatives. Al llarg del curs s'aniran fent comentaris específics al respecte.

Setmanalment hi haurà una sessió d'una **hora de problemes**. On s'explicarà la resolució dels problemes de les llistes que s'aniran lliurant periòdicament. Els problemes estan basats en les classes de teoria i estan pensats per a que l'alumne desenvolupi i apliqui els resultats i les idees desenvolupats a teoria: a vegades en un marc abstracte i, a vegades, en exemples concrets. **És importantíssim que l'alumne s'hagi barallat a fons amb els problemes, i per tant, que prepari els exercicis abans d'anar a classe** per poder contrastar les seves idees amb les dels companys i amb les del professor.

Al llarg del curs, en un parell o tres de sessions, els alumnes faran algun exercici, a la classe de problemes, de manera individual l'entregaran i s'els hi tornarà corregit amb tot detall. Els exercicis que es faran seran de caire mecànic però usant tècniques que són especialment importants pel curs.

Els **seminaris** completen i complementen tant les sessions de teoria com les de problemes. En cada sessió es proposarà una llista d'exercicis per resoldre que tractarà a fons alguna tècnica o idea del curs, o que farà experimentar a l'alumne amb alguna idea que s'hagi desenvolupat o que estarà per desenvoluparse a la teoria. En cada llista de seminari s'especificarà quins són els aspectes bàsics que es vol que l'alumne assolixi tot fent els problemes proposats.

A l'aula, en els seminaris, els alumnes treballaran en grups els problemes de la llista, preguntant al professor tantes vegades com els sigui necessari i es discutiran en comú les possibles estratègies per atacar el problema. Finalment el professor explicarà la resolució dels problemes més representatius de la llista.

En totes les activitats del curs és bàsica la participació dels estudiants però en el cas dels seminaris, a més, la classe s'estructurarà a partir de les seves aportacions. Com que per fer els exercicis s'haurà de conèixer una part de la teoria és important que l'alumne se l'hagi estudiat una mica abans de la sessió per a que pugui aprofitar al màxim les sessions de seminari.

Durant el curs es proposaran exercicis per lliurar. Sobre els exercicis lliurats, es faran entrevistes amb l'alumne per tal de que ell comentï com a fet la resolució i pugui rebre orientació tant sobre la seva solució del problema com en la manera d'exposar-la per escrit. Cal que l'estudiant es quedi una còpia dels exercicis lliurats per poder preparar l'entrevista amb antelació i que pugui fer una bona exposició oral de la feina que ha fet.

Els problemes que es proposaran per lliurar tindran sempre aspectes creatius, i es suggerirà que per solucionar alguns apartats més mecànics i calcullístics es faci ús d'un manipulador algebraic.

Al llarg del curs, es proposaran dos lliuraments per semestre amb la seva corresponent entrevista.

A banda de tot això els alumnes disposen d'unes **hores de tutoria** al despatxos dels professors de teoria, de problemes i de seminaris, on podran consultar dubtes i demanar tota mena d'ajuda en el seu treball.

A més, l'assignatura disposa d'una pàgina al "campus virtual"

<http://www.cv2008.uab.cat>

on s'hi aniran penjant les llistes d'exercicis, tant de problemes com de seminaris, material extra i tota la informació referent a l'assignatura.



TIPUS D' ACTIVITAT	ACTIVITAT	HORES	RESULTATS D'APRENTATGE
--------------------	-----------	-------	------------------------

Dirigides

Classes de Teoria	54	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11
Classes de Problemes	26	CE1, CE4,CE5, CE6, CE9, CE11

Supervisades

Seminaris	28	CE1, CE4,CE5, CE6, CE9, CE11

Autònomes

Estudi de la teoria	55	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11
Resolució de Problemes (de la classe de problemes i dels problemes per lliurar)	85	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11
Preparació dels seminaris	21	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11
Preparació de la presentació dels problemes per lliurar	8	CE1, CE11
Preparació de les entrevistes	4	CE1, CE11



8.- Avaluació

L'assignatura té una única convocatòria que es tanca al Juliol.

Un 25% de la nota correspon **l'avaluació continuada**. Aquesta nota s'obté a partir de l'entrega i correcció de problemes. Al llarg del curs això es farà de dues maneres:

1. a la classe de problemes es proposarà algun exercici per fer a l'aula de manera individual que serà corregit amb detall i retornat a l'alumne. Aquests problemes seran essencialment de caire mecànic i similars als de les llistes de problemes o dels seminaris.
2. l'entrega i correcció de problemes de llistes especials que es lliuraran als alumnes, ells entregaran fets i que seran discutits en entrevistes en grups reduïts. El tipus de problema que es plantejarà en aquestes llistes vol fer reflexionar en profunditat sobre les tècniques i les idees d'una part del curs.

Es faran dues d'aquestes entregues per semestre. La puntuació de cada entrevista inclourà una valoració de la presentació escrita dels exercicis i de l'expressió oral a l'entrevista.

D'aquí s'obindrà una nota sobre 10 que anomenarem *c*

L'altre 75% per cent de la nota correspon als **exàmens**.

Cada semestre es realitzarà:

1. A mig semestre es farà *una prova curta* a la classe de teoria d'una hora de durada. El contingut d'aquestes proves serà, en gran part, teòric.

Sigui t_1 la nota, sobre 10, obtinguda a la primera prova, i sigui t_2 la nota, sobre 10, de la segona prova.

2. Al final de cada semestre es farà un *examen parcial* sobre la matèria d'aquell semestre i en els que, principalment, es demanarà a l'alumne que resolgui exercicis.

Sigui p_1 la nota, sobre 10 del primer parcial, i sigui p_2 la nota, sobre 10, del segon parcial.

Així cada semestre s'obindrà una nota d'exàmens e_i , on

$$e_i = \text{Max} (p_i, 0.2 \cdot t_i + 0.8 \cdot p_i)$$

per $i=1,2$

La nota per parcials de l'assignatura serà

$$N_1 = 0.25 \cdot c + 0.35 \cdot e_1 + 0.4 \cdot e_2$$

Si $N_1 > 5$, llavors l'alumne pot triar entre dues opcions:

(a) Que N_1 sigui la seva nota de l'assignatura.

(b) Presentar-se a l'examen final per millorar aquesta nota. En aquest cas l'alumne obtindrà com a mínim la nota N_1 .

Després del segon parcial es farà un examen final de tota l'assignatura. Diguem j a la nota d'aquest examen i posem com a **nota per examen final**

$$N = 0.25 \cdot c + 0.75 \cdot j$$

La nota final de l'assignatura serà: $\text{Max} (N_1, N)$

Es considerarà que un alumne/a s'ha presentat a l'assignatura, i per tant té una nota final, si fa un cinquanta per cent de l'avaluació continuada i dels exàmens semestrals o si fa l'examen final.



ACTIVITATS D'AVUACIÓ

HORES

**RESULTATS
D'APRENTATGE**

ACTIVITATS D'AVUACIÓ	HORES	RESULTATS D'APRENTATGE
Realització de les 4 entrevistes	4	CE1, CE4,CE5, CE6, CE9,CE11
Dues proves de Teoria	2	CE1, CE5, CE6,CE11
Problemes realitzats individualment a classe de problemes (2 sessions)	2	CE1, CE4, CE11
Dos examens Parcialis	8	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11
Examen final (si s'escau)	4	CE1, CE4,CE5, CE6,CE11

9- Bibliografia i enllaços web

Bibliografia bàsica:

F. Cedó i A. Reventós. *Geometria plana i Àlgebra lineal*. Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 2004.

Bibliografia addicional:

F. Cedó i D. Herbera. *Àlgebra lineal i Geometria per a físics*. Notes que es deixaran al Campus Virtual.

A. Kostrikin and Y. Manin. *Linear algebra and Geometry*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1989. (Segona edició: 1997.)

L. Merino i E. Santos. *Àlgebra lineal con métodos elementales*. Ed. Thomson, Madrid, 2006.

F. Puerta. *Àlgebra lineal*. UPC, Barcelona, 1986.

Llibres de problemes:

F. Cedó i V. Gisin. *Àlgebra bàsica*. Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la UAB, Bellaterra, 1997.

J. García Lapresta, M. Panero, J. Martínez, J. Rincón y C. Palmero. *Test de Àlgebra lineal*. Ed. AC, Madrid, 1992.

J. Rojo e I. Martín. *Ejercicios y problemas de Àlgebra lineal*. Mc. Graw-Hill, Madrid, 1994.

M. Castellet i I. Llerena. *Àlgebra lineal i Geometria*. Manuals de la UAB, Servei de Publicacions de la UAB, no.1, Bellaterra, 1988 (versió castellana per Ed. Reverté, Barcelona, 1991).